

1 - مبدأ الاستدلال بالتراجع

P_n خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n .

إذا كانت الخاصية P_0 صحيحة و من أجل كل عدد طبيعي n ، P_n يستلزم P_{n+1} فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، P_n صحيحة.

• كيفية البرهان بالتراجع

للبرهان بالتراجع على أن خاصية P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n نتبع المراحل التالية :

1. نتحقق أن P_0 صحيحة.
2. نفرض أن P_n صحيحة من أجل عدد طبيعي n كفي و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة.
3. نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n ، P_n صحيحة.

ملاحظة : يمكن أن تكون الخاصية P_n معرفة من أجل $n \geq n_0$.

في هذه الحالة، نتحقق أن P_{n_0} صحيحة و نفرض أن P_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي n حيث $n \geq n_0$ ، و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة. ثم نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$ ، P_n صحيحة.

II - المتتاليات العددية

1. توليد متتالية

1.1. يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بحددها العام.

مثال : (v_n) متتالية معرفة بحددها العام $v_n = n + 3$ للحصول على حد معين يكفي تعويض n بالعدد الطبيعي المناسب. لدينا $v_{10} = 10 + 3 = 13$ ؛ $v_{27} = 27 + 3 = 30$

1.2. يمكن توليد متتالية عددية إذا كانت معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) .

مثال : المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + 2$ هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية.

لدينا $u_1 = 4$ ؛ $u_2 = 6$ ؛ $u_3 = 8$ ؛ $u_4 = 10$.

ملاحظة 1 : في المتتالية (v_n) ، v_{27} هو أحد حدودها، 27 هو دليله، أما رتبته فهي متعلقة بعدد الحدود التي تسبقه.

رتبة الحد v_k بالنسبة إلى الحد v_b حيث $b < k$ هي $b - k + 1$.

رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_0 هي $27 - 0 + 1$ أي 28.

رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_1 هي $27 - 1 + 1$ أي 27.

رتبة الحد v_{27} بالنسبة إلى الحد v_5 هي $27 - 5 + 1$ أي 23.

ملاحظة 2 : المتتالية (v_n) المعرفة بحددها العام $v_n = n + 3$ هي من الشكل $v_n = f(n)$

حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (v_n) و المعرفة كما يلي $f(x) = x + 3$.

المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2$

هي من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n)

و المعرفة كما يلي : $f(x) = x + 2$.

3.1. المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} .

المتتاليات الهندسية	المتتاليات الحسابية
<p>تعريف : (u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = qu_n$. q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n).</p>	<p>تعريف : (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي r بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + r$. r يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n).</p>
<p>الحد العام لمتتالية هندسية</p> <p>(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q الحد العام u_n معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \times q^n$.</p>	<p>الحد العام لمتتالية حسابية</p> <p>(u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r. الحد العام u_n معرف كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$.</p>
<p>حساب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$</p> <p>$(u_n)$ متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q. إذا كان $q = 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = nu_0$ إذا كان $q \neq 1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$ حيث n هو عدد حدود المجموع S.</p>	<p>حساب المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$</p> <p>$(u_n)$ متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = n \left(\frac{u_0 + u_{n-1}}{2} \right)$ حيث n هو عدد حدود المجموع S. ملاحظة : يمكن كتابة المجموع S على الشكل التالي : $S = nu_0 + \frac{n(n-1)r}{2}$</p>
<p>ملاحظة : إذا كان $q = 1$ فإن كل حدود المتتالية الهندسية مساوية للحد u_0. إذا كان $q = 0$ فإن كل الحدود بدءاً من u_1 منعدمة. إذا كان $q = -1$ فإن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_0$</p>	<p>ملاحظة : إذا كان $r = 1$ فإن كل حدود المتتالية الحسابية مساوية للحد u_0.</p>

2. خواص المتتاليات

2.1. اتجاه تغير متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N} .

• (u_n) متزايدة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \geq u_n$.

• (u_n) متناقصة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} \leq u_n$.

• (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n$.

• إذا كانت (u_n) متزايدة أو متناقصة نقول إنها رتيبة.

ملاحظة 1 : ندرس بنفس الطريقة اتجاه تغير المتتالية (u_n) إذا كانت معرفة على جزء من \mathbb{N} .

ملاحظة 2 : نستنتج اتجاه تغير متتالية حسابية (u_n) حسب إشارة أساسها r .

$r = 0$	$r < 0$	$r > 0$
(u_n) ثابتة	(u_n) متناقصة تماما	(u_n) متزايدة تماما

و نستنتج اتجاه تغير متتالية هندسية (u_n) حسب إشارة حدها الأول u_0 و قيمة أساسها q .

$q > 1$	$q = 1$	$0 < q < 1$	
(u_n) متزايدة تماما	(u_n) ثابتة	(u_n) متناقصة تماما	$u_0 > 0$
(u_n) متناقصة تماما		(u_n) متزايدة تماما	$u_0 < 0$

• إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ليست رتيبة.

• إذا كان $q = 0$ فإن المتتالية الهندسية (u_n) ثابتة بدءا من u_1 .

2.2. المتتاليات المحدودة

تعريف

(u_n) متتالية عددية.

• المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي M حيث

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq M$.

• المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي m حيث

من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq m$.

• المتتالية (u_n) محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى و من الأسفل.

2.3. نهاية متتالية عددية

(u_n) متتالية عددية و l عدد حقيقي.

تعريف

العدد الحقيقي l هو نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان من أجل كل مجال $[\alpha; \beta[$ يوجد عدد طبيعي p بحيث مهما يكن العدد الطبيعي n يحقق $n \geq p$: u_n ينتمي إلى المجال $[\alpha; \beta[$. نكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

ملاحظات

• إذا كانت نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$ عددا حقيقيا l نقول إن (u_n) متقاربة.
• إذا كانت نهايتها $+\infty$ أو $-\infty$ أو غير موجودة فإن (u_n) غير متقاربة و نقول عنها إنها متباعدة.

مبرهنة

إذا كانت متتالية متقاربة فإن نهايتها وحيدة.

2.4. مبرهنات حول نهايات متتاليات

مبرهنة

(u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على مجال $[\alpha; +\infty[$.
 α عدد حقيقي. l هو عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$.
إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

مبرهنة

f دالة معرفة على مجال I و $l \in I$: (u_n) متتالية معرفة بعلاقة من الشكل $u_{n+1} = f(u_n)$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \in I$.
إذا كانت (u_n) متقاربة نحو l و f مستمرة عند l فإن $l = f(l)$.

المبرهنات المتعلقة بحساب نهايات متتاليات

(u_n) و (v_n) متتالتان عدديتان : l و l' عددان حقيقيان.

• نهاية مجموع متتاليتين

$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l	l	l	إذا كانت $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ هي
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	l'	و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ هي
حالة عدم تعيين	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l + l'$	فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ هي

• نهاية جداء متتاليتين

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ هي	l	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	0
و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ هي	l'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n v_n$ هي	$l l'$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	حالة عدم تعيين

• نهاية حاصل قسمة متتاليتين

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ هي	l	l	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ هي	$l' \neq 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي	$\frac{l}{l'}$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	حالة عدم تعيين

إذا كانت $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ هي	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0
و $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ هي	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$ هي	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	حالة عدم تعيين

ملاحظة : توجد حالات، لا يمكن النص فيها عن النتيجة بتطبيق المبرهنات المتعلقة بمجموع متتاليتين، أو جداء متتاليتين أو حاصل قسمة متتاليتين. تسمى حالات عدم التعيين و هي من الشكل

$$+\infty - \infty ; 0 \times \infty ; \frac{0}{0} ; \frac{\infty}{\infty}$$

2.5. النتائج المتعلقة بالحصص والمقارنة

مبرهنة 1

• إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

• إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

مبرهنة 2

• إذا كانت متتالية متقاربة فإنها محدودة.

ملاحظة : العكس غير صحيح.

مبرهنة 3

(u_n)، (v_n)، (w_n) متتاليات عددية، l عدد حقيقي.

إذا كان (بدءاً من مرتبة معينة)	و كان ...	فإن ...
$u_n \leq w_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = +\infty$
$v_n \leq u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$
$ v_n - l \leq u_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$
$v_n \leq u_n \leq w_n$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

2. 6. نهاية متتالية هندسية

مبرهنة

(u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q .

. إذا كان $q > 1$ و $u_0 > 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

. إذا كان $q > 1$ و $u_0 < 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

. إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

. إذا كان $q \leq -1$ فإن نهاية (u_n) غير موجودة.

ملاحظات

. إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة و غير محدودة من الأعلى فإنها متباعدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

. إذا كانت المتتالية (u_n) متناقصة و غير محدودة من الأسفل فإنها متباعدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

III - المتتاليتان المتجاورتان

تعريف

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان.

نقول عن المتتاليتين (u_n) و (v_n) إنهما متجاورتان إذا تحقق ما يلي :

إحدى المتتاليتين متزايدة و الأخرى متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

مبرهنة 1

إذا كانت متتاليتان متجاورتين فكل منهما متقاربة و لهما نفس النهاية.

مبرهنة 2

(u_n) و (v_n) متتاليتان متجاورتان و نهايتهما l .

إذا كانت (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq l \leq v_n$.

إذا كانت (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n \leq l \leq u_n$.

1 اثبات خاصية بالتراجع

تمرين 1

(u_n) متتالية معرفة كما يلي $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.
أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

حل

• لتكن P_n الخاصية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $0 < u_n < 2$.
• $u_0 = 1$ إذن $0 < u_0 < 2$. بالتالي P_0 صحيحة .
• ليكن n عددا طبيعيا . نفرض أن P_n صحيحة أي $0 < u_n < 2$.
نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $0 < u_{n+1} < 2$.
لدينا $0 < u_n < 2$ إذن $2 < u_n + 2 < 4$.
ينتج أن $\sqrt{2} < \sqrt{u_n + 2} < 2$. وبالتالي $0 < \sqrt{u_n + 2} < 2$.
نستنتج أن $0 < u_{n+1} < 2$ أي P_{n+1} صحيحة .
إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، إذا كانت P_n صحيحة فإن P_{n+1} صحيحة .
و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : P_n صحيحة .
• ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.

تمرين 2

• أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $n! \geq 2^{n-1}$.
علما أن $1! = 1$ و من أجل $n \geq 2$: $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

حل

P_n هي الخاصية المعرفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي : $n! \geq 2^{n-1}$.
لدينا من أجل $n = 1$: $2^0 = 2^1 = 1$ و $1! = 1$. إذن $1! \geq 2^{1-1}$ أي P_1 صحيحة .
• ليكن n عددا طبيعيا حيث $n \geq 1$. نفرض أن P_n صحيحة أي $n! \geq 2^{n-1}$.
نبرهن أن P_{n+1} صحيحة : أي $(n+1)! \geq 2^n$.
نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $n+1 \geq 2$.
لدينا $n! \geq 2^{n-1}$ و $n+1 \geq 2$ إذن $(n+1)n! \geq 2^{n-1} \times 2$ أي $(n+1)! \geq 2^n$.
و بالتالي P_{n+1} صحيحة .
نستنتج أن من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، إذا كانت P_n صحيحة فإن P_{n+1} صحيحة .
و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، P_n صحيحة .
إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $n! \geq 2^{n-1}$.

تمرين 3

• أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

حل

نثبت ذلك بالتراجع.

• نضع P_n الخاصية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

• لدينا من أجل $n=1$: $\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

إذن من أجل $n=1$: $\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{1+1}$ و بالتالي P_1 صحيحة.

• ليكن n عددا طبيعيا حيث $n \geq 1$ نفرض أن P_n صحيحة

أي من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$: $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

و نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

• حسب الفرض لدينا $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

*ينتج أن $\left(\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

لدينا $\frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

و بالتالي $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

إذن من أجل العدد الطبيعي $n \geq 1$ إذا كان $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

فإن $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$

نستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

2 استعمال التمثيل البياني لتخمين سلوك ونهاية متتالية عددية

تمرين 1

• مثل بيانيا كلا من المتتاليات (u_n) المعرفة كما يلي :

$$1. \quad u_{n+1} = 2u_n + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

$$2. \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 0$$

$$3. \quad u_{n+1} = \frac{3 + u_n}{u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

استعمل تمثيل كل منها لتخمين سلوكها ونهايتها.

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}, \vec{j}; O)$. (Δ) هو المستقيم الذي معادلته $y = x$.

1. تمثيل المتتالية (u_n)

حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 2u_n + 1$

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة على \mathbb{R}^+ كما يلي :

$f(x) = 2x + 1$ و (\mathcal{C}) تمثيلها البياني.

مجموعة النقط $M_n(u_n; u_{n+1})$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

هي التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .

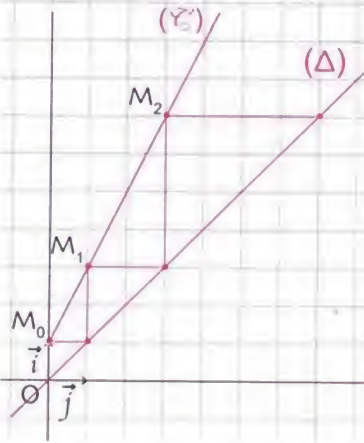
النقط $M_0(u_0; u_1)$, $M_1(u_1; u_2)$, $M_2(u_2; u_3)$, ...

هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية.

(\mathcal{C}) هو المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 1$.

النقط M_0, M_1, M_2, \dots هي نقط من هذا المستقيم.

التخمين: المتتالية (u_n) متزايدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



2. تمثيل المتتالية (u_n) حيث $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و (\mathcal{C}) التمثيل البياني

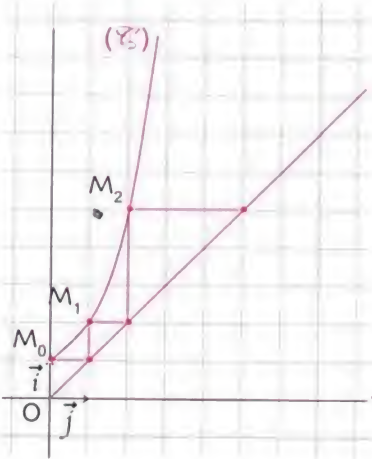
للدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = x^2 + 1$.

النقط $M_0(u_0; u_1)$, $M_1(u_1; u_2)$, $M_2(u_2; u_3)$, ...

نقط من التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .

المنحنى (\mathcal{C}) و هو فرع لقطع مكافئ يشمل النقط M_0, M_1, M_2, \dots

التخمين: المتتالية (u_n) متزايدة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



3. تمثيل المتتالية (u_n) حيث $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3+u_n}{u_n}$.

f هي الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و (\mathcal{C}) هو التمثيل البياني

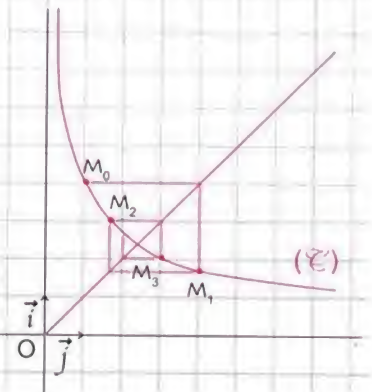
للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{3+x}{x}$.

M_0, M_1, M_2, \dots هي نقط من التمثيل البياني للمتتالية (u_n) .

المنحنى (\mathcal{C}) يشمل النقط M_0, M_1, M_2, \dots و هو فرع قطع زائد.

التخمين: المتتالية (u_n) ليست رتيبة. المتتالية (u_n) متقاربة

و نهايتها هي فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع (\mathcal{C}) .



تمرين 1

(u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}^* كما يلي $u_{n+1} = \frac{n+3}{2n-1}$

1. برهن أن المتتالية (u_n) محدودة.
2. حدد اتجاه تغيراتها ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

حل

1. المتتالية (u_n) معرفة بعلاقة من الشكل $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة

على المجال $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي f' حيث $f'(x) = \frac{-7}{(2x-1)^2}$

لدينا $f'(x) < 0$ على المجال $[1; +\infty[$ و بالتالي f متناقصة على $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f يكون كالآتي :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	4	$\frac{1}{2}$

من جدول تغيرات f ينتج أن على المجال $[1; +\infty[$

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 4 \quad \text{و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم}$$

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 4$$

أي المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ و من الأعلى بالعدد 4.

2. الدالة f متناقصة على المجال $[1; +\infty[$ إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم

$$f(n+1) \leq f(n) \quad \text{أي من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير منعدم،}$$

و بالتالي المتتالية (u_n) متناقصة على \mathbb{N}^* .

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \quad \text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \frac{1}{2} \quad \text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$$

تمرين 2

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي : $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 3$

1. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي : $v_n = u_n + k$: $k \in \mathbb{R}$ عين k بحيث تكون (v_n) متتالية هندسية. حدد عندئذ أساسها و حدها الأول.
2. عبر عن u_n و v_n بدلالة n .
3. عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

1. من المساواة $v_n = u_n + k$ ينتج أن $u_n = v_n - k$. تعيين v_{n+1} بدلالة v_n .
 لدينا $v_{n+1} = u_{n+1} + k = \left(\frac{u_n}{2} - 3\right) + k = \frac{1}{2}(v_n - k) - 3 + k = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$
 وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + \frac{k}{2} - 3$
 تكون (v_n) متتالية هندسية إذا كان $\frac{1}{2}k - 3 = 0$ أي $k = 6$.
 وبالتالي من أجل $k = 6$ المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول v_0 حيث $v_0 = u_0 + 6$ أي $v_0 = 13$.
 1. (v_n) متتالية هندسية إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = v_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 أي من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 13 \left(\frac{1}{2}\right)^n$
 ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 13 \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$
 3. لدينا $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ وبالتالي $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -6$

تمرين 3

- لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $u_n = \frac{\sin n + (-1)^n}{n}$
1. أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة.
 2. أدرس اتجاه تغير (u_n) ثم عين $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

1. نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ، $-1 \leq \sin n \leq 1$ و $-1 \leq (-1)^n \leq 1$
 إذن $-2 \leq \sin n + (-1)^n \leq 2$ ينتج أن $-\frac{2}{n} \leq \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \leq \frac{2}{n}$
 بما أن $n \geq 1$ فإن $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ و $0 < \frac{2}{n} \leq 2$ و $0 > -\frac{2}{n} \geq -2$
 وبالتالي $-2 \leq -\frac{2}{n} \leq \frac{\sin n + (-1)^n}{n} \leq \frac{2}{n} \leq 2$
 إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ، $-2 \leq u_n \leq 2$. ينتج أن المتتالية (u_n) محدودة
 من الأعلى بالعدد 2 و من الأسفل بالعدد -2. إذن المتتالية (u_n) محدودة.
2. من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم ، $-1 \leq \sin n \leq 1$ و $-1 + (-1)^n \leq \sin n + (-1)^n \leq 1 + (-1)^n$
 إذا كان n زوجيا فإن $n+1$ فردي وبالتالي $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ و $-\frac{2}{n} \leq u_{n+1} \leq 0$
 إذا كان n فرديا فإن $n+1$ زوجي وبالتالي $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq 0$ و $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$

ينتج أن إذا كان n زوجيا فإن $u_{n+1} \leq u_n$.

إذا كان n فرديا فإن $u_{n+1} \geq u_n$.

و بالتالي (u_n) ليست متزايدة و ليست متناقصة على \mathbb{N}^* .

أي المتتالية (u_n) ليست رتيبة على \mathbb{N}^* .

• بما أن $-\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{2}{n}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{2}{n} = 0$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4 معرفة و استعمال مفهوم المتتاليتين المتجاورتين

تقريب 1

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} كما يلي : $u_n = -\frac{1}{n+1}$ و $v_n = \frac{5}{2n+3}$.

هل المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان ؟

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \frac{-n-1+n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \quad \text{لدينا}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \text{إذن من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} - u_n > 0$$

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N} .

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

$$v_{n+1} - v_n = \frac{5}{2n+2+3} - \frac{5}{2n+3} = \frac{10n+15-10n-25}{(2n+5)(2n+3)} = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)} \quad \text{لدينا}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-10}{(2n+5)(2n+3)} < 0 \quad \text{إذن من أجل كل عدد طبيعي } n : v_{n+1} - v_n < 0$$

و بالتالي المتتالية (v_n) متناقصة على \mathbb{N} .

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$.

$$v_n - u_n = \frac{7n+8}{(2n+3)(n+1)} = \frac{7n+8}{2n^2+5n+3} \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0 \quad \text{إذن} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n+8}{2n^2+5n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7n}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{2n} = 0$$

لدينا (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

تمرين 2

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N} كما يلي : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{n}{n+2}$.
أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

حل

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$$

$$\text{إذن } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+2)(n+1)} > 0 \quad \text{نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي } n$$

و بالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N} .

• دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

$$\text{لدينا } v_{n+1} - v_n = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

$$\text{إذن } v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)} > 0 \quad \text{نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي } n$$

و بالتالي المتتالية (v_n) متزايدة على \mathbb{N} .

المتتاليتان (u_n) و (v_n) لهما نفس اتجاه التغير إذن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين.

تمرين 3

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}^* كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. بين أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

2. عين حصرا لنهايتهما من أجل $n = 8$.

حل

1. دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$\text{لدينا } u_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$$

• حساب $u_{n+1} - u_n$.

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \quad \text{إذن من أجل كل عدد } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

ينتج أن المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N}^* .

• حساب $v_{n+1} - v_n$.

$$\text{لدينا } v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

نلاحظ أن من أجل كل عدد n من \mathbb{N}^* : $\frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$.

إذن المتتالية (v_n) متناقصة على \mathbb{N}^* .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} = 0 \quad \text{لدينا}$$

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة على \mathbb{N}^* و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ فإن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

2. بما أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان فإن كلا منهما متقاربة و لهما نفس النهاية ℓ

التي تحقق من أجل كل عدد طبيعي n من \mathbb{N}^* : $u_n \leq \ell \leq v_n$.

لنحصل على الحصر التالي حسب قيم العدد الطبيعي n من \mathbb{N}^* .

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \quad ; \quad \mathbb{N}^* \text{ من } n \text{ عدد طبيعي}$$

تعيين حصر من أجل $n = 8$ لنهاية (u_n) باستعمال المتباينة المضغفة $u_n \leq \ell \leq v_n$

$$\text{و قيم العدد الحقيقي } \frac{1}{n!}$$

$$0,0416666 \leq \frac{1}{4!} \leq 0,0416667$$

$$0,0083333 \leq \frac{1}{5!} \leq 0,0083334$$

$$0,0013888 \leq \frac{1}{6!} \leq 0,0013889$$

$$0,0001984 \leq \frac{1}{7!} \leq 0,0001985$$

$$0,0000248 \leq \frac{1}{8!} \leq 0,0000249$$

$$1 \leq 1 \leq 1 \quad \text{لدينا}$$

$$1 \leq \frac{1}{1!} \leq 1$$

$$0,5 \leq \frac{1}{2!} \leq 0,5$$

$$0,1666666 \leq \frac{1}{3!} \leq 0,1666667$$

$$2,7182785 \leq \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \leq 2,7182791 \quad \text{بالجمع طرف لطرف نجد}$$

$$2,7182785 \leq \sum_{k=1}^8 \frac{1}{k!} \leq 2,7182791 \quad \text{أي}$$

$$\text{و بالتالي } 2,7182785 \leq u_n \leq 2,7182791 \quad \text{من أجل } n = 8$$

$$2,7182785 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 2,7182791 \quad \text{ينتج أن}$$

$$\text{إذن } 2,7182785 \leq \ell \leq 2,7182791$$

ملاحظة : يمكن تعيين حصر للعدد ℓ من أجل n أكبر، و تقريب ℓ من e أساس اللوغاريتم النيبيري.

تمارين و حلول نموذجية

مسألة

(u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$$u_{n+1} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} \quad ; \quad u_0 = -1 \quad \text{و من أجل كل عدد طبيعي } n$$

1. احسب الحدود u_1, u_2, u_3 .

2. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم : $u_n > 0$.

3. أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

5. احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

حل

1. حساب u_1, u_2, u_3 .

$$\text{لدينا } u_0 = -1 \quad ; \quad u_1 = \frac{3 + 2u_0}{2 + u_0} = \frac{3 - 2}{2 - 1} = 1 \quad \text{أي } u_1 = 1$$

$$u_2 = \frac{3 + 2}{2 + 1} = \frac{5}{3} \quad \text{أي } u_2 = \frac{5}{3}$$

$$u_3 = \frac{3 + \frac{10}{3}}{2 + \frac{5}{3}} = \frac{19}{11} \quad \text{أي } u_3 = \frac{19}{11}$$

2. نبرهن أن من أجل كل عدد n طبيعي غير منعدم : $u_n > 0$.
من أجل ذلك نطبق الإستدلال بالتراجع.

لتكن P_n الخاصية المعرفة على \mathbb{N}^* كما يلي : $u_n > 0$.

من أجل $n = 1$: $u_1 = 1$ إذن $u_1 > 0$.

إذن الخاصية P_n صحيحة من أجل $n = 1$.

نفرض أن P_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي غير المنعدم n : أي $u_n > 0$.

نبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي $u_{n+1} > 0$.

نعلم أن $u_n > 0$ إذن $3 + 2u_n > 0$ و $2 + u_n > 0$ و بالتالي $\frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} > 0$.

ينتج أن $u_{n+1} > 0$ أي P_{n+1} صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم n : P_n صحيحة.

و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم : $u_n > 0$.

3. إثبات أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$.

من أجل ذلك نثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \sqrt{3}$.

نضع P'_n الخاصية المعرفة على \mathbb{N} كما يلي : $u_n \leq \sqrt{3}$.

من أجل $n = 0$: $-1 \leq \sqrt{3}$ إذن $u_0 \leq \sqrt{3}$ أي P'_n صحيحة من أجل $n = 0$.

إذن الخاصية P'_n صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض أن P'_n صحيحة من أجل العدد الطبيعي n و نبرهن أن P'_{n+1} صحيحة أي $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$.

$$u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - \sqrt{3} = \frac{(3 - 2\sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})u_n}{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{3})(u_n - \sqrt{3})}{2 + u_n} \quad \text{لدينا}$$

نعلم أن $2 - \sqrt{3} > 0$ و $u_n - \sqrt{3} \leq 0$ و $2 + u_n > 0$ إذن $u_{n+1} - \sqrt{3} \leq 0$.

وبالتالي $u_{n+1} \leq \sqrt{3}$. نستنتج أن P'_n صحيحة.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq \sqrt{3}$.

4. دراسة إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3 + 2u_n}{2 + u_n} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} = \frac{(\sqrt{3} - u_n)(\sqrt{3} + u_n)}{2 + u_n}. \quad u_{n+1} - u_n \text{ إشارة}$$

نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم، $u_n > 0$ و $u_n \leq \sqrt{3}$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم : $\frac{3 - u_n^2}{2 + u_n} \geq 0$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

من أجل $n = 0$: لدينا $u_1 - u_0 = 1 - (-1) = 2$ أي $u_1 - u_0 = 2$ إذن $u_1 - u_0 > 2$.

ينتج أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

وبالتالي المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N} .

5. حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

نعلم أن المتتالية (u_n) متزايدة على \mathbb{N} و محدودة من الأعلى بالعدد $\sqrt{3}$ ، إذن (u_n) متقاربة.

الدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) هي الدالة المستمرة على $]0; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$.

نضع $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. نعلم أن من أجل كل عدد طبيعي غير منعدم : $u_n > 0$.

نبحث عن l في المجال $]0; +\infty[$ حيث $l = f(l)$.

لدينا $l = f(l)$ يعني $l = \frac{3 + 2l}{2 + l}$. أي $l^2 = 3$. ينتج أن $l = \sqrt{3}$. إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

الاستدلال بالتراجع

1 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

1. برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $0 < u_n < 3$.

2. برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

2 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

1. برهن أنه مهما يكن n من \mathbb{N} : $u_n < 2$.

2. برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة.

3 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \quad \text{و} \quad u_0 = 9$$

1. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

2. برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

4 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = 2u_n - 3 \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3 - 2^n$.

5 (u_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{4 + u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1$$

1. أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq u_n \leq 1$$

2. ما هو اتجاه تغير الدالة $x \mapsto \frac{1+x}{4+x}$

على المجال [0 ; 1] ؟

3. ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

6 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

غير منعدم : $4^n - 1$ مضاعف 3.

7 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

$7 \times 3^{5n} + 4$ يقبل القسمة على 11.

8 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

$$4^n - 3n - 1 \text{ يقبل القسمة على } 9.$$

9 برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n

$$n^3 - n \text{ يقبل القسمة على } 3.$$

10 a عدد حقيقي موجب تماما. برهن أن من أجل

$$\text{كل عدد طبيعي } n : (1+a)^n \geq 1 + na.$$

11 ليكن العدد S_n حيث

$$S_n = 1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

12 ليكن العدد S_n حيث

$$S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

برهن بالتراجع أن مهما يكن العدد الطبيعي n

$$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

توليد متتاليات

13 (u_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي:

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \quad \text{و} \quad u_1 = 2 : u_0 = 1$$

. عبر عن u_n بدلالة n.

. ادرس سلوك المتتالية (u_n).

. في التمارين 14، 15، 16، 17 يطلب تمثيل

المتتالية (u_n) و تخمين سلوكها و تعيين نهايتها

إن وجدت.

$$u_{n+1} = 1 - 2u_n \quad \text{و} \quad u_0 = 2 \quad 14$$

$$u_{n+1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 3 \quad 15$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = \frac{1}{2} \quad 16$$

$$u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n} \quad \text{و} \quad u_0 = 1 \quad 17$$

خواص المتتاليات

18 ادرس إن كانت المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل أو من الأعلى أو محدودة في كل من الحالات التالية :

$$\begin{array}{l} 1. u_n = \frac{n+2}{n} \\ 2. u_n = \frac{n^2+1}{n} \\ 3. u_n = \frac{n+3}{2n-1} \end{array}$$

19 نفس السؤال بالنسبة إلى المتتاليات (u_n) التالية:

$$\begin{array}{l} 1. u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \\ 2. u_n = \sqrt{n^2+1} - n \\ 3. u_n = 4^n - 3^n \end{array}$$

20 برهن أن المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0 = \frac{1}{7}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}$ محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{3}{4}$.

21 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$v_n = -n \quad \text{و} \quad u_n = \frac{n+1}{n}$$

22 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين الهندسيتين (u_n) و (v_n) بعد تعيين حدها الأول (من أجل $n = 0$)

$$v_n = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{و} \quad u_n = 2^{n-1}$$

23 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$v_n = (-2)^{n-1} \quad \text{و} \quad u_n = -\frac{1}{2^{n-1}}$$

24 (u_n) هي متتالية معرفة على \mathbb{N}^* كما يلي :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

1. برهن أن (u_n) متناقصة.

2. أثبت أن (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها ؟

25 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليات الهندسية (u_n) التالية علما أن حدها الأول u_0 وأساسها q .

1. $u_0 = -2$ و $q = \frac{1}{3}$

2. $u_0 = \frac{2}{3}$ و $q = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

26 ادرس اتجاه تغير المتتالية الهندسية (v_n) التالية علم حدها الأول v_0 وأساسها q .

$$\begin{array}{l} 1. v_0 = 1 \quad \text{و} \quad q = 2 \\ 2. v_0 = -1 \quad \text{و} \quad q = -3 \end{array}$$

27 ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$\begin{array}{l} 1. u_0 = 1 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \sqrt{n+7} \\ 2. v_0 = 8 \quad \text{و} \quad v_{n+1} = \sqrt{3v_n+1} \end{array}$$

28 (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كما يلي :

$$u_n = 1 + n + \sin n$$

1. أحصر (u_n) بمتتاليتين حسابيتين (v_n) و (w_n) .

2. استنتج نهاية (u_n) لما يؤول n إلى $+\infty$.

29 (u_n) متتالية معرفة على \mathbb{N} كما يلي

$$u_n = \frac{n^4}{n!}$$

ادرس اتجاه تغير (u_n) و نهايتها إن وجدت.

30 (u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$2u_n = u_{n+1} + 1 \quad \text{و} \quad u_0 = 2$$

1. برهن أن المتتالية (v_n) المعرفة بحدها العام $v_n = u_n - 1$ هي متتالية هندسية.

2. عبر عن u_n بدلالة n .

3. ادرس نهاية (u_n) .

31 (u_n) متتالية معرفة كما يلي :

$$u_0 = 3 \quad \text{و} \quad u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} - 4$$

1. ادرس اتجاه تغير هذه المتتالية.

2. (v_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي :

$v_n = u_n + 6$. أثبت أن (v_n) متتالية هندسية.

عين v_n بدلالة n .

3. ما هي نهاية (u_n) ؟

المتتاليات المتجاورتان

32 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}

كما يلي : $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ و $v_n = \frac{2n+7}{n+2}$

أثبت أن (u_n) و (v_n) متجاورتان و عين نهايتهما .

33 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}

كما يلي : $u_n = \frac{3n+4}{n+1}$ و $v_n = \frac{3n^2+4}{n^2+1}$

أثبت أن (u_n) و (v_n) غير متجاورتين .

34 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}^*

كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

35 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على \mathbb{N}^*

كما يلي : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

أثبت أن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

مسائل

36 (u_n) متتالية عددية معرفة كما يلي :

$u_0 = 1$ و $u_n = u_{n-1} + n^2 - n + 5$

1 . عين الحدود الخمسة الأولى لهذه المتتالية .

2 . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم :

$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3 . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n غير منعدم :

$1 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

4 . استنتج عبارة u_n بدلالة n .

5 . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

37 نعرف المتتالية (u_n) بحدها الأول $u_0 = 0$

و علاقة التراجع التالية $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}$

1 . احسب الحدود u_1, u_2, u_3 .

2 . لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$

كما يلي $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

و (\mathcal{C}) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة 2cm) .

أ . ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ و المنحنى (\mathcal{C}) في المعلم السابق .

ب . استعمل المستقيم (Δ) و المنحنى (\mathcal{C}) لتمثيل النقط

من محور الفواصل التي فواصلها هي u_0, u_1, u_2, u_3 .

ج . ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية (u_n) ؟

3 . برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

4 . أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي

$0 \leq u_n \leq 2$: n

5 . احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

38 (u_n) متتالية عددية معرفة على \mathbb{N}

كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n - 2} \end{cases}$

1 . احسب الحدود u_1, u_2, u_3 .

2 . نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال

$\left[\frac{2}{3}; +\infty\right]$ كما يلي : $f(x) = \sqrt{3x-2}$

ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى

المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة 1cm) .

(Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$.

أ . ارسم (Δ) و (\mathcal{C}) في المعلم السابق .

ب . باستعمال المستقيم (Δ) و المنحنى (\mathcal{C}) ، عين النقط

من (\mathcal{C}) التي فواصلها u_0, u_1, u_2, u_3 .

ج . ماذا يمكن تخمينه حول سلوك المتتالية (u_n) ؟

3 . أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2 .

4 . أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة .

5 . استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

6 . احسب نهاية المتتالية (u_n) .